

*Н. Г. Бикчинтаева*

Инженер 2 категории ПАО «Интелтех» (Санкт-Петербург)

*О. В. Орлова*

Инженер 1 категории ПАО «Интелтех» (Санкт-Петербург)

## ОЦЕНКА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ЛОГИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ЦИФРОВОГО ДЕМОДУЛЯТОРА F1B

**АННОТАЦИЯ.** В предыдущей статье авторов был подробно рассмотрен алгоритм обработки цифрового сигнала класса F1B (с характеристиками:  $f$  — частота сигнала,  $b$  — скорость передачи), а также приведены примеры с конкретными тестами и оценкой вычислительной сложности алгоритма. Однако, при этом остался открытым вопрос обеспечения помехоустойчивости. Теоретическая ее оценка предлагается в данной работе.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** помехоустойчивость, цифровой демодулятор, вероятность ошибки, оптимальный приемник.

### Введение

Оценить помехоустойчивость конкретного рабочего алгоритма сравнительно с потенциальной помехоустойчивостью — задача нетривиальная, но решаемая.

Рассмотрим аддитивную помеху типа «белый шум», имеющую нормальный закон распределения вероятностей с нулевым средним и дисперсией  $\sigma = 1$ . Это самый интересный случай с точки зрения практического приложения. Информация — двоичные символы с равной априорной вероятностью.

Для иллюстрации постановки задачи представим схему алгоритма отдельными вычислительными блоками. На рис. 1 показано, что оценка значения информационного бита производится в два этапа, изображенных отдельными блоками, между которыми существует обратная связь.

На рис. 1 представлены:

$S[i]$  — промежуточные решения об оценке символов на  $i$ -ых отсчетах квадратуры;

если  $S[i] = 1$ ,  $S1[i] = 1$ ;

если  $S[i] = 0$ ,  $S0[i] = 1$ ;

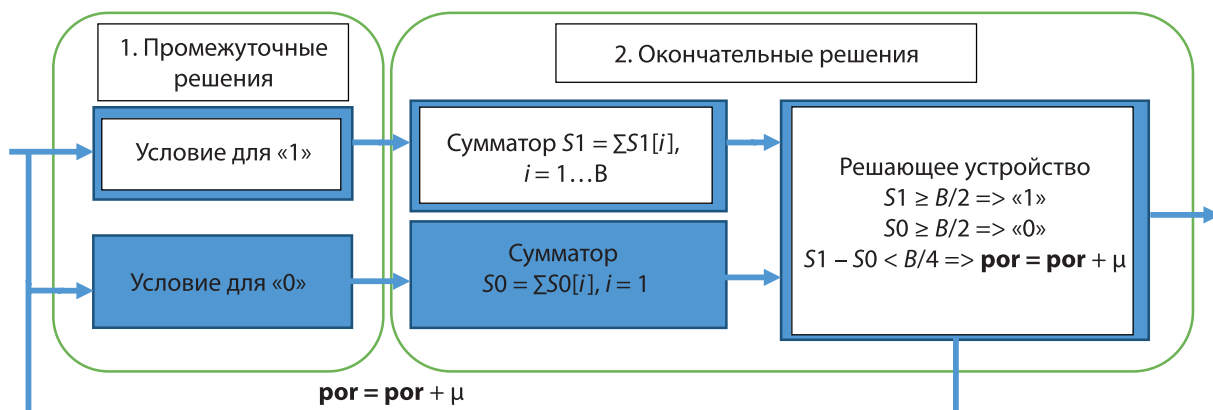


Рис. 1. Схема логического алгоритма демодулятора F1B

$$\begin{cases} S1 = \sum S1[i]; \\ S0 = \sum S0[i]; \end{cases} \quad (1)$$

$S1, S0$  — суммы промежуточных решений; «1» или «0» — окончательные решения об оценке символа на интервале 1 бита выносятся по факту превышения суммой  $S1$  или  $S0$  величины  $B/2$ , где  $B$  — число отсчетов квадратуры на длительности одного бита;

**por** — порог, используемый в логическом алгоритме для оценки знака отсчета действительной части квадратуры и знака производной мнимой части квадратуры;

$\mu$  — приращение порога.

Задача расчета вероятности ошибки для логического алгоритма включает в себя:

- 1) оценку вероятности ошибки  $p[i]$  на отдельном отсчете;
- 2) оценку средней вероятности ошибки  $\bar{p}$  при предварительном решении;
- 3) оценку влияния величины порога и эффекта усреднения отсчетов квадратур на интервале  $n$  отсчетов на среднюю вероятность ошибки при предварительном решении;
- 4) оценку вероятности ошибки при окончательном решении задачи, при известной  $\bar{p}$ .

## 1. Вероятность ошибки промежуточной оценки

### 1.1. Определение вероятности ошибки на каждом отсчете

На первом этапе решение о значении символа  $S[i]$  выносится по каждому отсчету квадратуры:

$S[i] = 1$ , если  $\{[A\cos(2\pi i/N) + \mathcal{X}_0^r > 0] \oplus ([A\sin'(2\pi i/N) + \mathcal{X}_0^i > 0])\} = 0$ ,

$S[i] = 0$ , если  $\{[A\cos(2\pi i/N) + \mathcal{X}_0^r > 0] \oplus ([A\sin'(2\pi i/N) + \mathcal{X}_0^i > 0])\} = 1$ .

Здесь:  $\oplus$  — исключающее «или» (сложение по mod2).

$S[i]$  — предварительное решение о значении символа на  $i$ -ом отсчете;

$A\cos(2\pi i/N)$  — действительная часть отсчета квадратуры;

$A\sin'(2\pi i/N)$  — производная мнимой части отсчета квадратуры;

$N$  — число отсчетов квадратуры за 1 период частоты сигнала  $f_s$  при частоте дискретизации  $f_d$ ,  $N = f_s/f_d$ ;

$\mathcal{X}_0^2$  — средняя мощность шума.

Амплитуды меняются по гармоническому закону, соответственно, вероятности тоже будут

меняться с изменением амплитуды. Вероятность ошибки  $p[i]$  на отдельном отсчете при фиксированном отношении сигнал/шум изменяется от минимального значения при максимальной амплитуде до максимального в точках нулевой амплитуды, кратных  $\pi$ . Период функции, описывающей вероятность ошибки  $\pi$ , в дискретном времени —  $N/2$ , а ее вид представлен на рис. 2.

$$P[t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Для производной мнимой части квадратуры вид графика имеет такой же вид.

На каждом отсчете функция  $p[i]$  определяется по таблице значений интеграла Лапласа, которые табулированы.

Используя порог, мы исключаем из анализа самые неблагоприятные участки на протяжении периода частоты сигнала, там, где вероятность ошибки максимальна.

График зависимости вероятности ошибки для каждого отсчета за полупериод представлен на рис. 3.

Когда мы имеем дело с квадратурами, то шум, также как и сигнал, представлен своими проекциями в ортогональных системах координат.

В реальном алгоритме оценка вычисляется еще проще:

Пусть  $A1 = A\cos(2\pi i/N) + \mathcal{X}_0^r$ , тогда производную заменим приращением за один отсчет квадратуры:

$$A2 = A \sin(2\pi i/N) + \mathcal{X}_0^i;$$

$$A3 = A \sin(2\pi(i+1)/N) + \mathcal{X}_0^i;$$

$A = 1$  — для теоретической оценки амплитуды нормированы к «1»;

$$S[i] = \begin{cases} 1, & \text{если } \{(A1 > por) \text{ и } (A3 - A2) > 0\} \\ & \text{или } \{(A1 < -por) \text{ и } (A3 - A2) < 0\}, \\ 0, & \text{если } \{(A1 < -por) \text{ и } (A3 - A2) > 0\} \\ & \text{или } \{(A1 > por) \text{ и } (A3 - A2) < 0\}. \end{cases} \quad (3)$$

Входная последовательность отсчетов квадратур усредняется на интервале  $n$  отсчетов. Это позволяет не только уменьшить число анализируемых величин, но приводит к уменьшению дисперсии шума в  $n$  раз. Величина отсчета с шумом по вероятности сходится к исходному значению по теореме Чебышева (закон больших чисел).

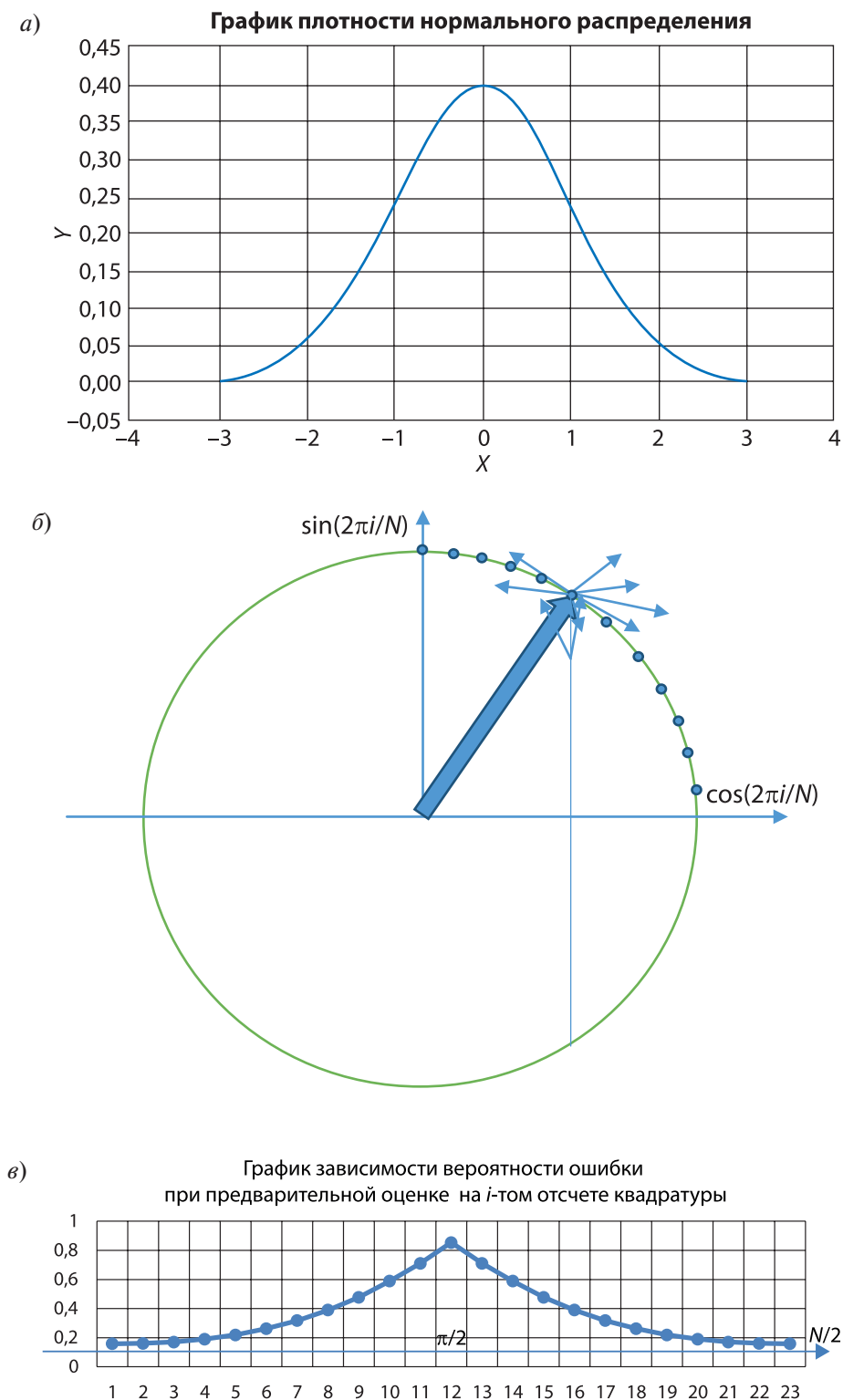


Рис. 2. *a* – плотность распределения случайных величин – отсчетов квадратуры с шумом; *б* – результат сложения отсчетов квадратуры и шума со средней мощностью  $\mathcal{N}_0$ , имеющего гауссовское распределение; *в* –  $p[i]$  – вероятность превышения случайной величиной  $A\cos(2\pi i/N) + \mathcal{N}_0$  нулевого порога на промежутке  $N/2$  – половины периода, что соответствует  $\pi$ .

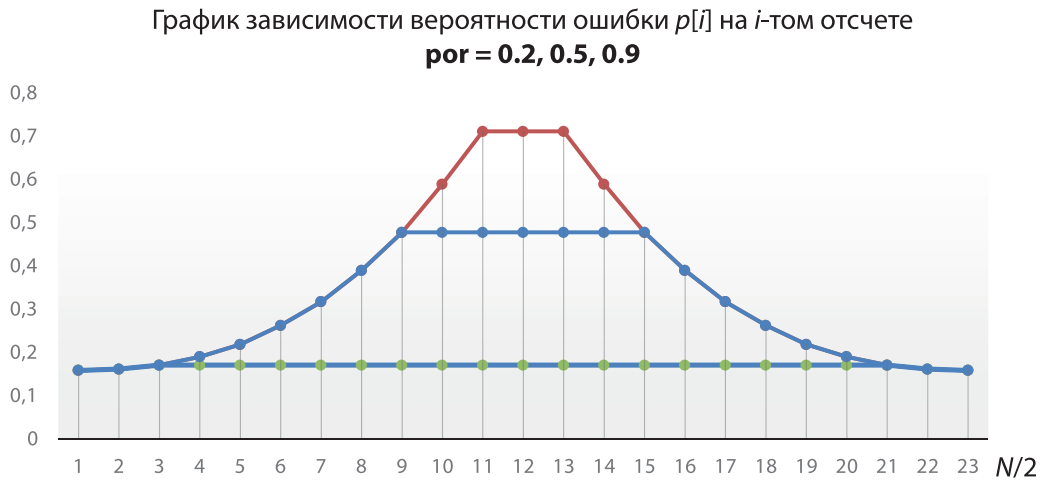


Рис. 3. Вид функции  $p[i]$  при использовании порога **por**

$$P_{A1} = \begin{cases} \Phi \left[ h\sqrt{n} \frac{\cos\left(\frac{2\pi i}{N}n\right)}{\sigma} \right] & \text{при } i = 0, 1, \dots, \arccos(\text{por}) \quad i = N/2 - \arccos(\text{por}), N/2, \\ \{2 \arccos(\text{por}) \text{ отсчетов}\}, \\ \Phi \left[ \sqrt{n} \frac{\text{por}}{\sigma} \right] & \text{при } i = \arccos(\text{por}) \dots N/2 - \arccos(\text{por}), \\ \left\{ \left( \frac{N}{2} - 2 \arccos(\text{por}) \right) \text{ отсчетов} \right\}. \end{cases} \quad (4)$$

где: **por** — порог;  $n$  — число отсчетов на котором производится усреднение принятых отсчетов действительной (и мнимой) частей квадратуры;  $h$  — отношение амплитуд сигнал/шум;  $i$  — текущий индекс отсчетов;  $\Phi[x] = 0,5 - \int_0^x P[t]dt$ ;  $P[t] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

После усреднения полученных отсчетов квадратур на интервале  $n$  текущий индекс меняется через каждые  $n$  отсчетов.

При использовании порога вероятности ошибки на каждом отсчете меняются, когда ам-

плитуда отсчета больше порога. Пока она меньше порога, то вероятность ошибки на отсчете  $i$  постоянна и задается величиной порога.

Приращение мнимой части отсчетов квадратуры ( $A3-A2$ ) — величина случайная, меняется на протяжении периода частоты сигнала от минимального значения при  $\pi/2 + \pi k$  до максимального при  $0 + \pi k$ . Соответственно, вероятность ошибки будет изменяться, как и для действительной части квадратуры, с максимумами и минимумами в тех же точках. Разница в том, что минимальные вероятности больше, чем для действительной части, т. к. амплитуды приращения меньше, чем амплитуды действительной части.

$$P_{(A3-A2)} = \begin{cases} \Phi \left[ h\sqrt{n} \frac{\sin\left(\frac{2\pi i+1}{N}n\right) - \sin\left(\frac{2\pi i}{N}n\right)}{\sigma} \right] & \text{при } i = 0, 1, \dots, \arcsin(\text{por}) \quad i = N/2 - \arcsin(\text{por}), N/2, \\ \{2 \arccos(\text{por}) \text{ отсчетов}\}, \\ \Phi \left[ \sqrt{n} \frac{\arcsin(\text{por}) - \sin(\arcsin(\text{por}-1))}{\sigma} \right] & \text{при } i = \arccos(\text{por}) \dots N/2 - \arccos(\text{por}), \\ \left\{ \left( \frac{N}{2} - 2 \arcsin(\text{por}) \right) \text{ отсчетов} \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

Составим полную группу событий:

Пусть пришел «0» (для «1» — симметрично, т. к. символы равновероятны и вероятность получения «0» и «1» равна 1/2:  $P(0) = P(1) = 1/2$

$$P(0)\{P[(A1 > \text{por}) \text{ И } (A3 - A2) < 0] \text{ ИЛИ } P[(A1 < -\text{por}) \text{ И } (A3 - A2) > 0] \text{ ИЛИ } P[(A1 > \text{por}) \text{ И } (A3 - A2) > 0] \text{ ИЛИ } P[(A1 < -\text{por}) \text{ И } (A3 - A2) < 0]\} = 1/2 \quad (6)$$

Здесь подчеркнуты вероятности событий, приводящих к ошибочному решению, которое можно рассчитать с вероятностью:

$$P(0)\{P(A1 > \text{por}) P(A3 - A2) > 0\} + P(A1 < -\text{por}) P(A3 - A2) < 0\}. \quad (7)$$

Для нормального закона распределения:

$$P(0)\{(1 - \Phi[A1])(1 - \Phi[A3 - A2]) + \Phi[A1]\Phi[A3 - A2]\} = 1/2\{\Phi[A1] + \Phi[A3 - A2] - 2\Phi[A1]\Phi[A3 - A2]\}.$$

Здесь:

$$\Phi[x] = 0,5 - \int_0^x P[t] dt; \quad (8)$$

$$P[t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

### 1.2 Оценка средней вероятности ошибки при предварительном решении

Определим среднее значение вероятности ошибки на интервале, равном периоду частоты сигнала:

$$\bar{p} = n/2N \sum_0^{N/n} \{\Phi[A1] + \Phi[A3 - A2] - 2\Phi[A1]\Phi[A3 - A2]\} \quad (9)$$

На рис. 4 представлены графики функций, рассчитанных по формуле (7)

Результаты расчетов показывают, что вероятности ошибки при предварительном решении зависят от величины порога, от частоты сигнала, от интервала усреднения отсчетов  $n$ .

При низких частотах сигнала приращение мнимых составляющих значительно меньше, чем при высоких частотах. Однако, при низких частотах усреднять отсчеты можно на большем интервале времени. Так, для F1500(150) усреднение производилось на 16 отсчетах (12 отсчетов на период), а для F1200(50) — на 40 отсчетах (24 отсчета на период), вероятности ошибки ниже.

От скорости передачи средние вероятности ошибки при предварительном решении не зависят.

## 2. Вероятность ошибки окончательных оценок символов

### 2.1. Закон распределения вероятностей ошибки при окончательной оценке

На втором этапе алгоритма решение о переданном символе выносится по выборке  $B$  промежуточных оценок.

Событие, состоящее в ошибочном решении, описывается дискретным законом распределения вероятностей.

Выборка  $m$  предварительных решений при вероятности ошибки предварительного решения  $\bar{p}$  — содержит  $k$  ошибочных с вероятностью  $P(m, k)$

$$P(m, k) = \frac{k!}{(m - k)! k!} \cdot \bar{p}^k q^{m - k}. \quad (10)$$

где:  $q = 1 - \bar{p}$ ,  $m$  — величина выборки,  $k$  — число отсчетов, приводящих к искомому результату с некоторой вероятностью.

Выборка  $m$  содержит не менее  $k$  ошибочных отсчетов с вероятностью

$$P = 1 - \sum_{k=0}^m (C_m^k) \bar{p}^k (1 - \bar{p})^{m - k}, \quad (11)$$

где:

$$(C_m^k) = \frac{m!}{(m - k)! k!}.$$

Вероятность того, что предварительное решение  $S[i] = 1$  при условии, что передан «0», ИЛИ  $S[i] = 0$  при условии, что передана «1»:

$$p_0 P(S[i] = 1) = p_1 P(S[i] = 0) = \bar{p}, \quad (11)$$

где  $\bar{p}$  — средняя вероятность ошибки при предварительном оценивании, которая была вычислена в прошлом разделе;

$B$  — число отсчетов на один информационный бит. Для вынесения окончательной оценки рассматривается  $m = B$  отсчетов. Если число  $k = S1$  отсчетов превышает значение  $S1 > B/2$ , а передавался «0», ИЛИ  $S0 > B/2$  а передавалась «1», то окончательная оценка будет ошибочной.

### 2.2 Расчет вероятности ошибки

В п. 3.1 показано, что выбор окончательной оценки соответствует задачам, которые описываются биномиальным законом распределения.

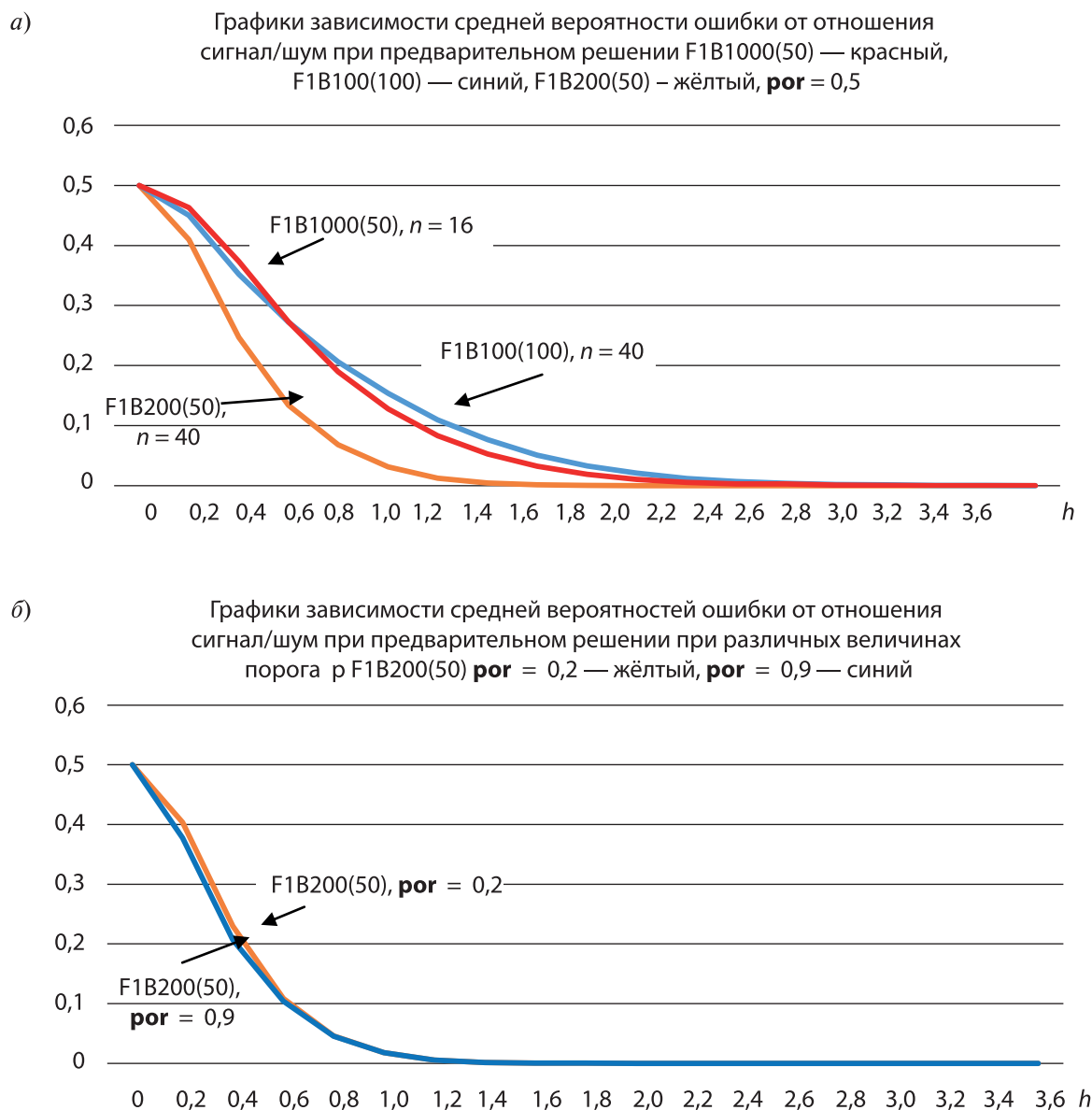


Рис. 4. Результаты расчета средней вероятности ошибки при предварительном решении для различных частотах, интервалах усреднения и скоростях передачи (а), для различных значений порогов (б)

Если передан «0», то полная группа событий описывается следующим образом:

$$P(0) P(S_0 < B/2) + P(0) P(S_1 \geq B/2) + P(1) P(S_0 \geq B/2) + P(1) P(S_0 > B/2) = 1, \\ P(S_1 \geq B/2) = 1 - P(S_1 < B/2) \quad (12)$$

Вероятность ошибки  $P(S_1 \geq B/2)$  в этом случае можно рассчитать по формуле:

$$P(S_1 \geq B/2) = 1 - \sum_{k=0}^{B/2n} \binom{C_{B/n}^k}{C_{B/n}^k} \bar{p}^k (1 - \bar{p})^{B/n-k}, \quad (13)$$

где:

$$\binom{C_m^k}{C_m^k} = \frac{m!}{(m-k)!k!},$$

$\bar{p}$  — средняя вероятность ошибки при предварительном оценивании.

Кривые, построенные по результатам расчетов приведены на рис. 7. Расчет по формуле (13) при использовании прореживания не представляет сложности, позволяет применение рекуррентных выражений:

$$P(m, k) = \frac{k!}{(m-k)!k!} p^k q^{n-k} =$$

$$= P(m, k-1) \frac{m-k+1}{qk} p. \quad (14)$$

Иллюстрация этих расчетов приведена на графиках рис. 5

5. Графики зависимости вероятностей ошибки при предварительном и окончательном решении от отношения сигнал/шум

### 3. Статистическая проверка расчетных значений вероятности ошибки

Для проверки корректности выбранного алгоритма расчета вероятности ошибки было проведено статистическое исследование зависимости частоты ошибок от отношения сигнал/шум для сигналов с теми же параметрами, что были приняты и в расчетах.

Генератор случайной последовательности двоичных информационных символов построен так, что случайная последовательность уникальна, без повторов. Белый шум генерируется по тому же принципу: он всегда разный. Для получения модели белого шума с нормальным распределением вероятностей, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией использовался алгоритм Бокса-Мюллера.

Порог в алгоритме подстраивается автоматически в зависимости от того, насколько близко число промежуточных решений «1» и «0». В на-

чале работы алгоритма задается первоначальное значение порога, ниже которого он не опускается.

Результаты статистических проверок представлены на рис. 6, 7 и 8, где обозначено первоначальное значение порога.

### 4. Сравнительная оценка результатов моделирования работы логического алгоритма с оптимальным приемником

Представляет интерес сравнительная оценка помехоустойчивости логического алгоритма с потенциальной помехоустойчивостью, которую обеспечивает оптимальный приемник ЧМ сигналов. Для корректности такой оценки помехоустойчивость оптимального приемника следует рассматривать в условиях предварительного усреднения отсчетов квадратур на интервале  $n$  отсчетов. Такую предварительную обработку квадратур можно делать для любого приемника. При этом мы уменьшаем дисперсию нормального белого шума в  $n$  раз.

На рис. 9 представлены кривые помехоустойчивости оптимального приемника с предварительным усреднением отсчетов квадратур, расчетные кривые для логического алгоритма и кривые частоты ошибок, полученные при статистическом моделировании:  $a$  —) представляет наиболее благоприятный случай соотношения частоты сигнала и скорости передачи: наиболее высокая скорость передачи  $f = 200$  Гц при возможности усредне-

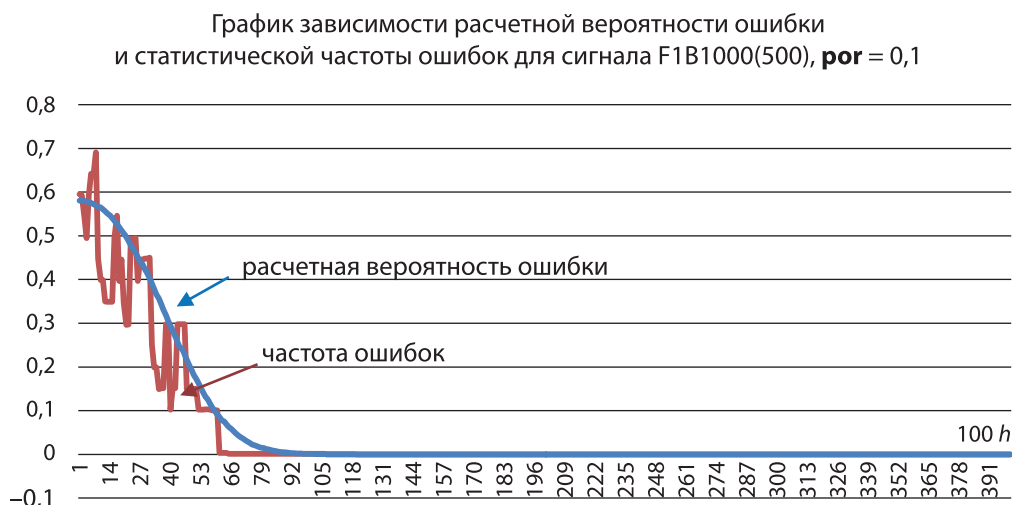


Рис. 6. Статистическая проверка алгоритма расчета помехоустойчивости логического алгоритма декодирования сигналов класса F1B1000(500)

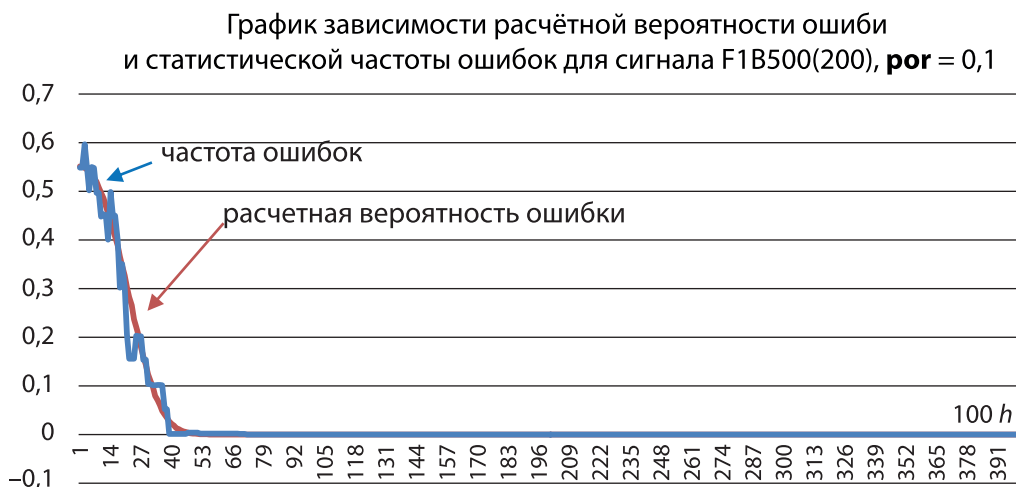


Рис. 7. Статистическая проверка алгоритма расчета помехоустойчивости логического алгоритма декодирования сигналов класса F1B500(200)



Рис. 8. Статистическая проверка алгоритма расчета помехоустойчивости логического алгоритма декодирования сигналов класса F1B200(100)

ния на большом интервале  $n = 40$  отсчетов и малая скорость передачи  $b = 50$  бод;  $b \rightarrow$ ) представляет наименее благоприятное соотношение  $f = 1000$  Гц,  $b = 500$  бод. Частота сигнала позволяет усреднение на интервале  $n = 8$ , на 1 бит приходится всего 24 отсчета

Теоретически можно сделать и больший интервал (до предельного по теореме Котельникова), но моделирование показывает, что необходим некоторый запас.

На рис. 10 приведена сравнительная оценка помехоустойчивости логического алгоритма с помехоустойчивостью оптимального приемника.

Как видно из графиков, расчетные кривые тем более приближаются к кривым помехоустойчивости оптимального алгоритма, чем выше частота сигнала, чем больше интервал усреднения и чем ниже скорость передачи данных. В этом есть некоторое противоречие, т. к. при высокой частоте сигнала интервал усреднения ограничен: он должен по теореме Котельникова превышать двойное значение частоты.

Экспериментальные данные: частоты ошибок хорошо приближаются к расчетным, значит, расчет вполне корректен.

Представляет интерес сравнение расчетных значений вероятностей ошибки для когерентно-



го и некогерентного оптимальных приемников и для логического алгоритма. Он не является когерентным, однако, побитовая синхронизация для него просто не нужна. Поэтому можно ожидать, что его кривые помехоустойчивости не хуже, чем для некогерентного оптимального приемника. Логический алгоритм в этом смысле можно рассматривать как квазикогерентный.

На рис. 11 приведены кривые помехоустойчивости для когерентного и некогерентного оптимальных приемников и для логического алгоритма. Для всех трех случаев был учтен эффект усреднения отсчетов квадратур на интервале 8 отсчетов для сигналов класса F1B1000(500) и на интервале 40 отсчетов для F1B200(50)

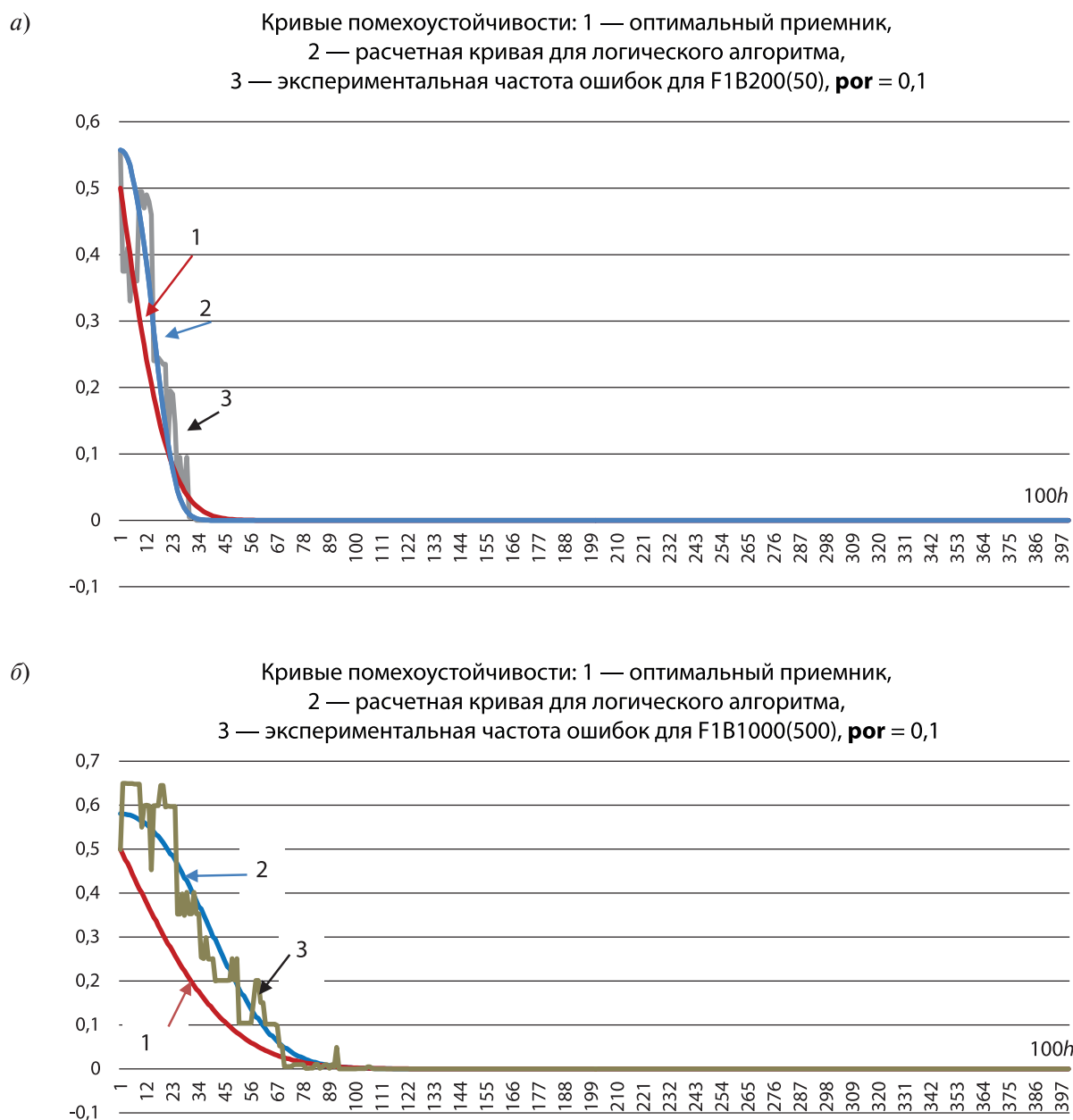


Рис. 9. Кривые помехоустойчивости оптимального приемника с предварительным усреднением отсчетов квадратур, расчетные кривые для логического алгоритма и кривые частоты ошибок, полученные при статистическом моделировании

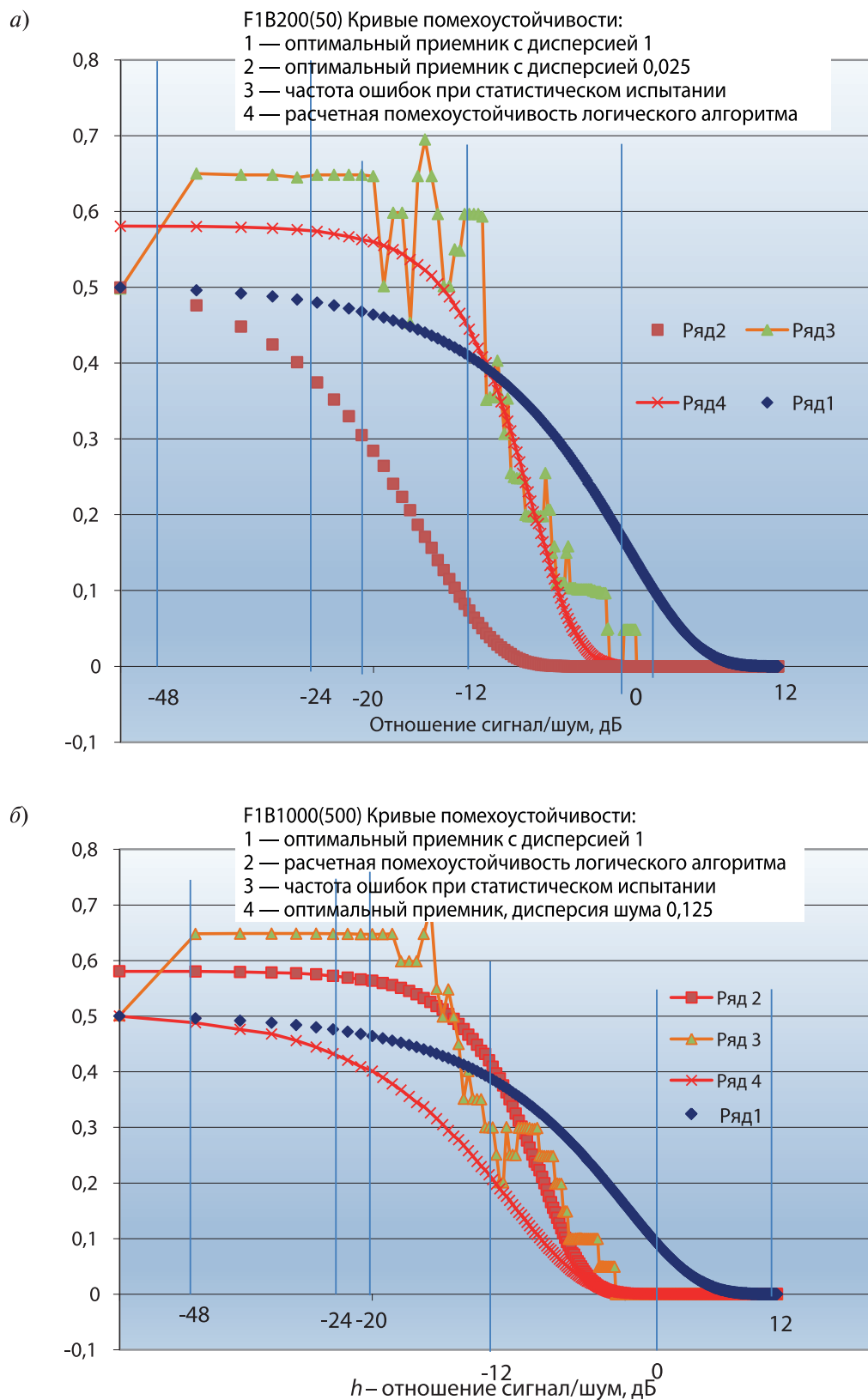


Рис. 10. Сравнительная оценка помехоустойчивости логического алгоритма с помехоустойчивостью оптимального приемника

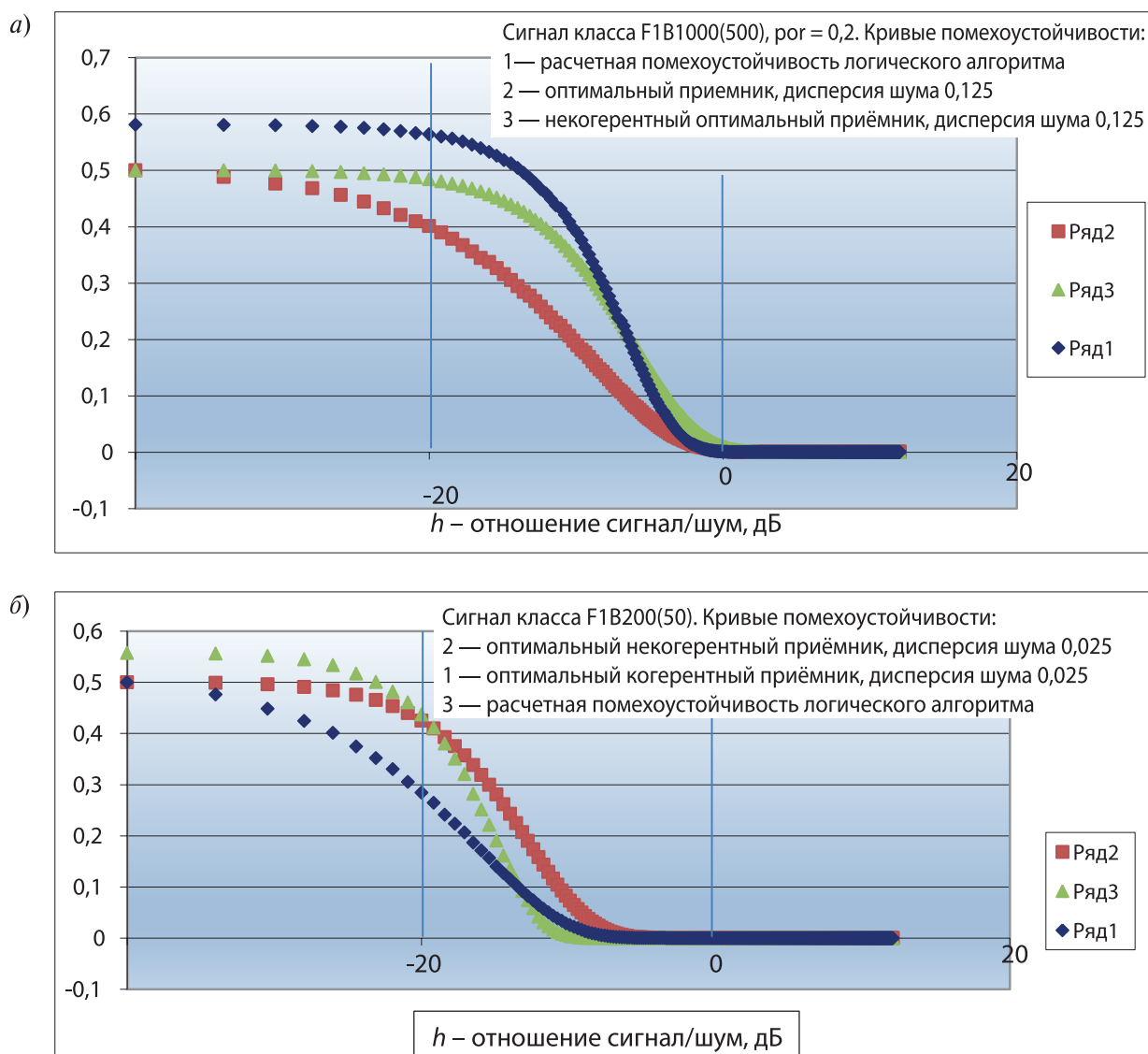


Рис. 11. Кривые помехоустойчивости для оптимального когерентного, оптимального некогерентного, и логического алгоритмов: (а) — сигнал класса F1B1000(500), (б) — F1B200(50)

### Выводы

Оценку помехоустойчивости алгоритма для дискретного сигнала можно выполнять в 2 этапа:

определить среднюю вероятность ошибки при вынесении решения о промежуточной оценке  $\bar{p}$  с учетом использования порога;

определить вероятность ошибки при вынесении решения об окончательной оценке исходя из величины  $\bar{p}$ .

На первом этапе оценивания вероятность ошибки зависит от частоты сигнала, интервала усреднения и порога. В свою очередь

предпочтительные большие частоты не позволяют использовать больших интервалов усреднения.

На втором этапе оценивания вероятность ошибки зависит от вероятности ошибки на первом этапе, от скорости передачи и интервала усреднения.

Результаты моделирования показали, что логический алгоритм дает хорошие результаты, как при аналитической, так и при статистической оценке помехоустойчивости.

Реализация предложенного алгоритма проста и предполагает полностью цифровую

обработку сигналов. Логический алгоритм не нуждается в побитовой синхронизации, позволяет настройки изменением интервала усреднения и порога. Недостатком является зависимость от величин частоты сигнала и скорости передачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Бикчинтаева Н. Г.** Логический алгоритм демодуляции цифрового частотно-модулированного сигнала / Н. Г. Бикчинтаева, В. В. Дмитриев, О. В. Орлова // Техника средств связи. Научно-технический сборник. — 2017. Вып. 6 (145). — СПб. — С. 41–51.